

第2讲乘法公式

一、平方差公式

1. 概念

1. 平方差公式：两数和与这两数差的乘积等于这两个数的平方差，即 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

2. 公式的特点：左边是两个二项式相乘，这两个二项式中有一项 相同，另一项 相反；右边是乘式中两项的 平方差，即符号相同的那一项的平方 减去 符号相反的那一项的平方。

【备注】平方差公式①

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

即：两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差。

常见平方差公式的变化形式：

(1) 位置变化： $(b+a)(-b+a) = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

(2) 符号变化： $(-a-b)(a-b) = -(a+b)(a-b) = -(a^2 - b^2) = b^2 - a^2$ 。

(3) 系数变化： $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$ 。

(4) 指数变化： $(a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2)^2 - (b^2)^2 = a^4 - b^4$ 。

🍎 举个“栗”子

栗子1

1. 下列算式能用平方差公式计算的是（ ）。

A. $(2a+b)(2b-a)$

B. $\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(-\frac{1}{2}x-1\right)$

C. $(3x-y)(-3x+y)$

D. $(-m-n)(-m+n)$

【备注】利用平方差公式概念进行判断，注意是否需要变形

【答案】D

【解析】 $\because (2a+b)(2b-a) = ab - 2a^2 + 2b^2$ ，不符合平方差公式的形式，故A选项错误。

$\because \left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(-\frac{1}{2}x-1\right) = -\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ ，不符合平方差公式的形式，故B选项错误。

$\because (3x-y)(-3x+y) = -(3x-y)^2$ ，不符合平方差公式的形式，故C选项错误。

$\because (-m-n)(-m+n) = m^2 - n^2$, 符合平方差公式, 故D选项正确.

故选D.

【标注】【知识点】平方差公式的计算

2. 为了应用平方差公式计算 $(a-b+c)(a+b-c)$, 必须先适当变形, 下列各变形中, 正确的是 () .

A. $[(a+c)-b][(a-c)+b]$

B. $[(a-b)+c][(a+b)-c]$

C. $[(b+c)-a][(b-c)+a]$

D. $[a-(b-c)][a+(b-c)]$

【备注】对于三项的式子利用平方差公式, 可以把其中两项看成整体

【答案】 D

【解析】平方差公式是把多项式分解为两个数的和与两个数的差的积的形式.

$$\therefore (a-b+c)(a+b-c) = [a-(b-c)][a+(b-c)].$$

故选: D.

【标注】【知识点】平方差公式的计算

栗子2

3. 填空题

(1) $(3x+1)(3x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $(4x-3y)(3y+4x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\left(\frac{1}{2}x+y\right)\left(\frac{1}{2}x-y\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $(a+3)(a-3)(a^2+9) = \underline{\hspace{2cm}}$

【备注】平方差公式的计算, 注意(4)一定要计算彻底

【答案】 (1) $9x^2 - 1$

(2) $16x^2 - 9y^2$

(3) $\frac{1}{4}x^2 - y^2$

(4) $a^4 - 81$

【解析】 (1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

【标注】【知识点】平方差公式的计算

4. 计算：

(1) $(a + b - c)(a - b + c)$.

(2) $(1 + 2x + y)(1 - 2x - y)$.

(3) $(2a - b + 3c)(2a + b - 3c)$.

【备注】 利用平方差公式计算，三项式多注意计算不要出错

【答案】 (1) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$.

(2) $1 - 4x^2 - y^2 - 4xy$.

(3) $4a^2 - b^2 - 9c^2 + 6bc$.

【解析】 (1) 略 .

(2) 略 .

(3) 略 .

【标注】【知识点】平方差公式的计算

栗子3

5. 计算： $102 \times 98 =$ _____ .

【备注】 利用平方差公式进行巧算

【答案】 9996

【解析】 $102 \times 98 = (100 + 2) \times (100 - 2) = 100^2 - 2^2 = 9996$.

【标注】【知识点】利用乘法公式计算

6. 计算： $2019^2 - 2017 \times 2021 =$ _____ .

【备注】 与第7题技巧相同，要注意添括号与去括号

【答案】 4

【解析】 $2019^2 - 2017 \times 2021$

$$= 2019^2 - (2019 - 2)(2019 + 2)$$

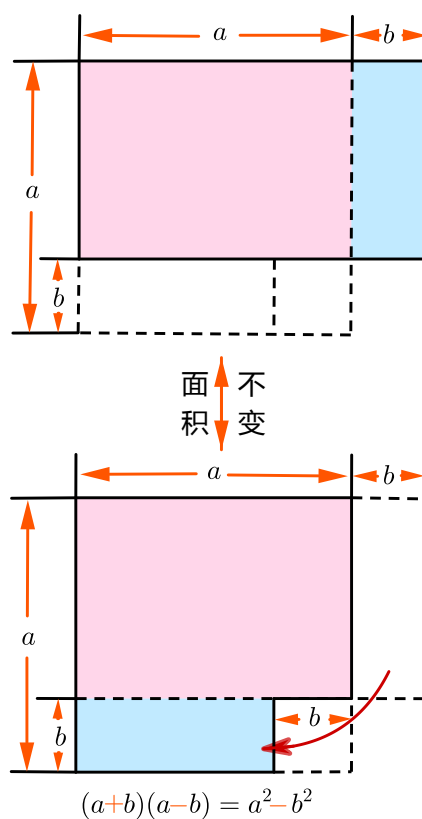
$$= 2019^2 - 2019^2 + 2^2$$

$$= 4.$$

故答案为：4.

【标注】【知识点】利用乘法公式计算

2. 几何意义



【备注】图中图形面积的和可以看作是长为 $(a+b)$ 宽为 $(a-b)$ 的长方形的面积，则

$S = (a+b)(a-b)$ ．同样也可以看作边长为 a 的正方形减去边长为 b 的正方形的图形的面积，则 $S = a^2 - b^2$ ．因为图形旋转过程中面积保持不变，所以 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ．即平方差公式成立．

🍌 举个“栗”子

栗子4

7. 如图1, 在长为 a 的正方形中挖掉一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$) 把余下的部分剪拼成一个矩形 (如图2), 通过计算两个图形 (阴影部分) 的面积, 验证了一个等式, 则这个等式是 () .

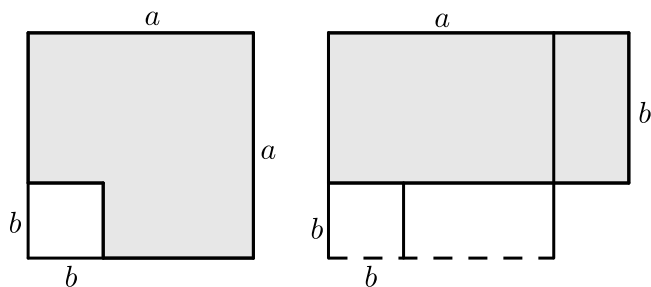


图 1

图 2

- A. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
 B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 C. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 D. $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 + 2ab - 2b^2$

【备注】平方差公式典型推导过程

【答案】 A

【解析】 图1中, $S = a^2 - b^2$.

图二中, $S = (a + b)(a - b)$,

$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

【标注】【知识点】平方差公式的计算

8. 如图, 在边长为 a 的正方形中, 剪去一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$) , 将余下部分拼成一个梯形, 根据两个图形阴影部分面积的关系, 可以得到一个关于 a 、 b 的恒等式为 () .

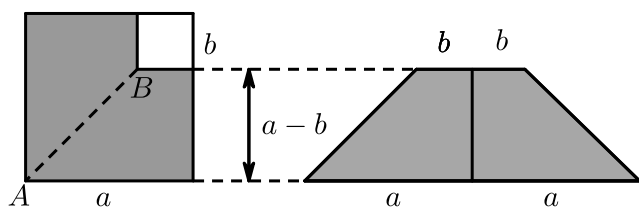


图 1

图 2

- A. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 C. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
 D. $a^2 + ab = a(a + b)$

【备注】平方差公式推导的其他类型, 仍用面积进行推导

【答案】 C

【解析】 正方形中, $S = a^2 - b^2$;

梯形中, $S = \frac{1}{2}(2a + 2b)(a - b) = (a + b)(a - b)$;

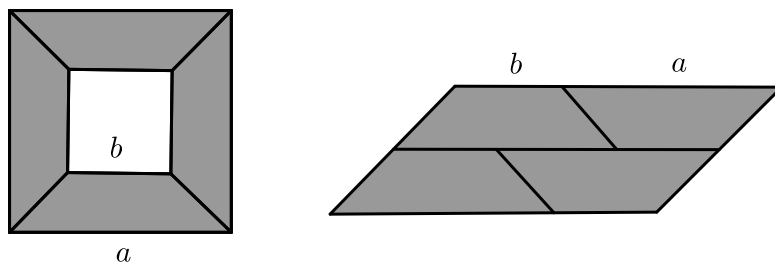
故所得恒等式为：

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

故选：C.

【标注】【知识点】平方差公式的几何背景

9. 从边长为 a 的大正方形纸板中挖去一个边长为 b 的小正方形纸板后，将其截成四个相同的等腰梯形，然后拼成一个平行四边形，那么通过计算两个图形阴影部分的面积，可以验证成立的公式为（ ）.



A. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

B. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

C. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

D. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

【备注】平方差公式推导的其他类型，仍用面积进行推导

【答案】C

【解析】阴影部分的面积相等，即甲的面积 $=a^2 - b^2$ ，乙的面积 $=(a + b)(a - b)$.

即： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

所以验证成立的公式为： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

【标注】【知识点】平方差公式的几何背景

二、完全平方公式

1. 概念

1.完全平方公式：

两数和的平方，等于它们的平方和加上它们积的两倍，即 $(a + b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

两数差的平方，等于它们的平方和减去它们积的两倍，即 $(a - b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 公式的特点：左边是一个 二项式的平方，右边是一个 二次三项式，首尾两项是公式左边二项式中每一项的 平方，中间项是二项式中 两项乘积的两倍。公式中的 a, b 可以是任意的单项式或多项式。

3. 平方差公式和完全平方公式也叫做乘法公式。

【备注】完全平方公式②

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

即：两个数的和（或差）的平方，等于它们的平方和，加上（或减去）它们的 **积的2倍**。

常见完全平方公式的变化形式：

$$(1) (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

$$(2) (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

$$(3) (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab.$$

$$(4) (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab.$$

$$(5) ab = \frac{1}{2} [(a + b)^2 - (a^2 + b^2)].$$

$$(6) ab = \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a - b}{2} \right)^2.$$

$$(7) a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2ab.$$

 举个“栗”子

栗子5

10. 计算：

$$(x + 1)^2 = \underline{\hspace{2cm}}; (y + 2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(-x + 1)^2 = \underline{\hspace{2cm}}; (-2x + 1)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3x + y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}; (2m + n)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\left(\frac{3}{4}x - 2 \right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}; \left(\frac{2}{3}x - 6 \right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(-2x - 3y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}; (-3m - 4n)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}; (2x^2 - 3y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【备注】 直接利用平方差公式进行计算，注意互为相反数的两个式子的平方相同

【答案】 $x^2 + 2x + 1$; $y^2 + 4y + 4$; $1 - 2x + x^2$; $1 - 4x + 4x^2$; $9x^2 + 6xy + y^2$;
 $4m^2 + 4mn + n^2$; $\frac{9}{16}x^2 - 3x + 4$; $\frac{4}{9}x^2 - 8x - 36$; $4x^2 + 12xy - 9y^2$;
 $9m^2 + 24mn + 16n^2$; $x^4 + x + \frac{1}{4}$; $4x^4 - 12x^2y + 9y^2$

【标注】【知识点】 完全平方公式的计算-不含分式

11. 填空：

$$(1) \left(\frac{3}{5}x + \underline{\hspace{1cm}} \right)^2 = \frac{9}{25}x^2 + 6xy + 25y^2.$$

$$(2) m^2 - 8m + \underline{\hspace{1cm}} = (m - \underline{\hspace{1cm}})^2.$$

$$(3) (a \pm \underline{\hspace{1cm}})^2 = a^2 \pm \underline{\hspace{1cm}} + \frac{1}{9}b^2.$$

$$(4) (\underline{\hspace{1cm}})^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}.$$

【备注】 完全平方公式的逆应用，对于二次三项式中的每一项的理解

【答案】 (1) $5y$

$$(2) 16; 4$$

$$(3) \frac{1}{3}b; \frac{2}{3}ab$$

$$(4) a - \frac{1}{2}$$

【标注】 【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

栗子6

12. 运用完全平方公式计算：

$$(1) 98^2.$$

$$(2) 101^2.$$

【备注】 利用完全平方公式进行简便运算

【答案】 (1) 9604.

$$(2) 10201.$$

【解析】 (1) 98^2

$$\begin{aligned} &= (100 - 2)^2 \\ &= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2 \\ &= 10000 - 400 + 4 \\ &= 9604. \end{aligned}$$

$$(2) 101^2$$

$$\begin{aligned} &= (100 + 1)^2 \\ &= 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2 \\ &= 10000 + 200 + 1 \\ &= 10201. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用乘法公式计算

13. 计算： $1.99^2 - 1.98 \times 1.99 + 0.99^2$.

【备注】完全平方公式的逆应用，注意到中间的 $2ab$ 需要把2提出来

【答案】1 .

【解析】 $1.99^2 - 1.98 \times 1.99 + 0.99^2$
 $= 1.99^2 - 2 \times 0.99 \times 1.99 + 0.99^2$
 $= (1.99 - 0.99)^2$
 $= 1 .$

【标注】【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

栗子7

14. 若 $m + n = 7$, $mn = 12$, $m^2 + n^2$ 的值是 () .

A. 1

B. 25

C. 2

D. -10

【备注】直接对已知式子进行平方，计算 $a^2 + b^2$ 、 ab 等的大小

【答案】B

【解析】根据完全平方公式可得：

$$m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 49 - 24 = 25 .$$

【标注】【知识点】应用完全平方进行简便运算

15. 已知 $a^2 + b^2 = 13$, $ab = 6$, 则 $a + b$ 的值是 _____ .

【备注】此题为易错题，先求出 $(a + b)^2$ ，再注意到正负的问题

【答案】 ± 5

【解析】 $\because a^2 + b^2 = 13$,
 $ab = 6$,
 $\therefore (a + b)^2$,
 $= a^2 + b^2 + 2ab$,

$$= 13 + 12 = 25$$

$$\therefore a + b = \pm 5.$$

【标注】【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

栗子8

16. 填空：

(1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $a^2 + b^2 = \frac{1}{2} [\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}]$.

(4) $(a - b)^2 = (a + b)^2 - \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) $ab = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【备注】重点探究 $(a+b)^2$ 与 $(a-b)^2$ 之间的关系，可以作为结论记忆

【答案】 (1) $2ab$

(2) $2ab$

(3) $(a + b)^2; (a - b)^2$

(4) $4ab$

(5) $\frac{1}{2} [(a + b)^2 - a^2 - b^2]; \frac{1}{2} [a^2 + b^2 - (a - b)^2]; \frac{1}{4} [(a + b)^2 - (a - b)^2]$

【解析】 (1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

(5) 略

【标注】【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

17. 已知 $(m - n)^2 = 8$, $(m + n)^2 = 2$, 则 $m^2 + n^2 = (\quad)$.

A. 10

B. 6

C. 5

D. 3

【备注】应用上道题的结论计算即可

【答案】 C

【解析】 $\because (m-n)^2 = 8$,

$$\therefore m^2 - 2mn + n^2 = 8 \text{ ①},$$

$$\because (m+n)^2 = 2,$$

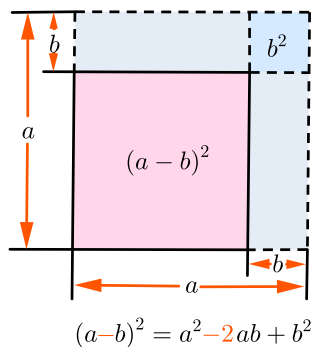
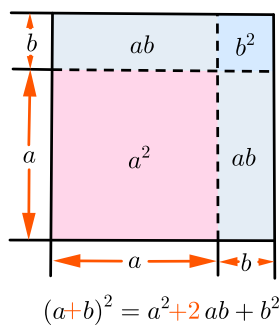
$$\therefore m^2 + 2mn + n^2 = 2 \text{ ②},$$

$$\text{①} + \text{②} \text{得}: 2m^2 + 2n^2 = 10,$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 5.$$

【标注】【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

2. 几何意义



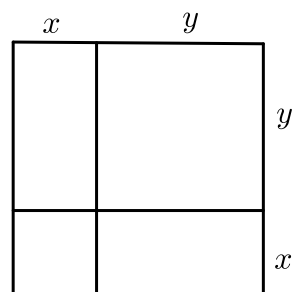
【备注】 上图是边长为 $(a+b)$ 的正方形，它的面积为 $(a+b)^2$ 。它的面积由4部分组成，即边长为 a 的正方形，边长为 b 的正方形，2个长为 a ，宽为 b 的长方形。4部分的面积和为 $a^2 + b^2 + 2ab$ 。即 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 。

下图是边长为 a 的正方形，它的面积是 a^2 ，它的面积由4部分组成，即边长为 $(a-b)$ 的正方形，2个长为 $a-b$ ，宽为 b 的长方形，一个边长为 b 的正方形，4部分的面积和为 $(a-b)^2 + 2(a-b)b + b^2 = (a-b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$ ，即 $a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$ 。则 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

举个“栗”子

栗子9

18. 请你观察图形，根据图形面积之间的关系，不需要添加辅助线，便可以得到一个你熟悉的公式，这个公式是（ ）.



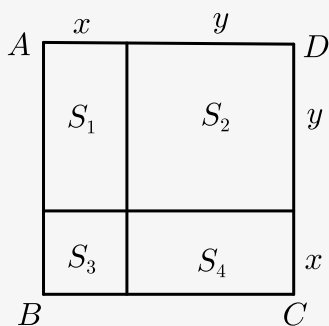
- A. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
 B. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
 C. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
 D. $(x+y)^2 = x^2 + xy + y^2$

【备注】 完全平方公式典型推导过程

【答案】 B

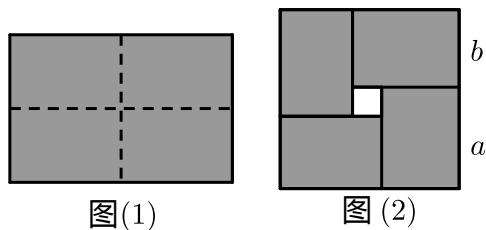
【解析】 如图所示，根据面积可以得到：

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}ABCD} &= (x+y)^2, \\ S_{\text{四边形}ABCD} &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &= xy + y^2 + x^2 + xy = x^2 + 2xy + y^2, \\ \therefore (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2. \end{aligned}$$



【标注】 【知识点】 完全平方公式的几何背景

19. 图（1）是一个长为 $2a$ ，宽为 $2b$ （ $a > b$ ）的长方形，用剪刀沿图中虚线（对称轴）剪开，把它分成四块形状和大小都一样的小长方形，然后按图（2）那样拼成一个正方形，则中间空的部分的面积是（ ）.



图(1)

图(2)

A. ab

B. $(a+b)^2$

C. $(a-b)^2$

D. $a^2 - b^2$

【备注】 完全平方公式的几何背景重点推导 $(a+b)^2$ 与 $(a-b)^2$ 的关系

【答案】 C

【解析】 图1是一个长为 $2a$ ，宽为 $2b$ ($a > b$) 的长方形，

$\therefore$ 由题意可得，正方形的边长为 $(a+b)$ ，

$\therefore$ 正方形的面积为 $(a+b)^2$

$\therefore$ 原矩形的面积为 $4ab$ ，

$\therefore$ 中间空余部分的面积

$$= (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 .$$

故选C .

【标注】 【知识点】 完全平方公式的几何背景